دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

بسمه تعالی

پاسخنامه آزمون معادلات دیفرانسیل   نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۴-۱۳۹۳   تاریخ: ۱۳۹۴/۰۳/۱۷

۱. جواب عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را تعیین کنید:

$$\begin{cases} \acute{x}(t) - x(t) + \acute{y}(\mathrm{t}) + y(t) = 0 \\ \acute{x}(t) + x(t) + \acute{y}(\mathrm{t}) - y(t) = \dfrac{t}{2} \end{cases}$$

حل: توجه کنیم که در دستگاه معادلات فوق x و y توابعی از متغیر مستقل t می باشند. با استفاده از عملگر مشتق داریم:

$$\begin{cases} (D-1)x + (D+1)y = 0 \\ (D+1)x + (D-1)y = \dfrac{t}{2} \end{cases}$$

با ضرب کردن عبارت دوم در $-(D+1)$ و عبارت اول در $(D-1)$ و جمع کردن دو عبارت داریم:

$$(D-1)^2x - (D+1)^2x = 0 - (D+1)\frac{t}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{t}{2} \ \rightarrow -4Dx = -\frac{1}{2} - \frac{t}{2}$$

$$\boxed{x = \frac{t}{8} + \frac{t^2}{16} + c_1}$$

$$\rightarrow \ (D+1)y = -(D-1)x = \frac{-1}{8} - \frac{t}{8} + \frac{t^2}{16} + \frac{t}{8} + c_1 = \frac{t^2}{16} - \frac{1}{8} + c_1$$

$$\rightarrow \ y = \frac{1}{(1+D)}\left(\frac{t^2}{16} - \frac{1}{8} + c_1\right) = (1 - D + D^2)\left(\frac{t^2}{16} - \frac{1}{8} + c_1\right) = \frac{t^2}{16} - \frac{1}{8} + c_1 - \frac{t}{8} + \frac{1}{8} = \frac{t^2}{16} - \frac{t}{8} + c_1$$

روش دوم استفاده از تبدیل لاپلاس است. با استفاده از تبدیل لاپلاس و جایگذاری $x(0) = A, \mathrm{y}(0) = B$ و لاپلاس گیری از طرفین معادلات دستگاه، مشابه روش اخیر دستگاه را حل نموده و در نهایت از وارون تبدیل لاپلاس برای دستیابی به جواب نهایی استفاده می‌کنیم.

۲. هریک از معادلات زیر را با استفاده از روش سری‌ها حول نقطه $x_0 = 0$ حل کنید:

I. $y'' - 2x\acute{y} + 6y = 0$

II. $5x^2y'' + x\acute{y} - (1 - x^3)y = 0$

حل (الف): با توجه به اینکه نقطه $x = 0$ یک نقطه عادی برای معادله فوق است لذا معادله طبق قضیه دارای جوابی به فرم زیر است:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,, \qquad \acute{y} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \,, \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 6\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 6\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ضریب } x^0} 2a_2 + 6a_0 = 0 \rightarrow \boxed{a_2 = -3a_0}$$

$$\xrightarrow{\text{ضریب } x^n} (n+2)(n+1)a_{n+2} + (6-2n)a_n = 0 \rightarrow \boxed{a_{n+2} = -\frac{6-2n}{(n+2)(n+1)} a_n}$$

$$\rightarrow a_3 = -\frac{2}{3}a_1, \quad a_4 = -\frac{2}{12}a_2 = \frac{1}{2}a_0, \qquad a_5 = 0$$

$$a_6 = \frac{2}{30}a_4 = \frac{1}{30}a_0, \qquad a_7 = \frac{4}{42}a_5 = 0, \ldots . a_9 = a_{11} = \cdots = a_{2k+5} = 0$$

$$\boxed{y = a_0\left(1 - 3x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{30}x^6 + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{2}{3}x^3\right)}$$

حل (ب): توجه کنیم که نقطه $x = 0$ یک نقطه غیرعادی از نوع منظم برای معادله فوق است. زیرا

$$y'' + \frac{\frac{1}{5}}{x}y' - \frac{\frac{1-x^3}{5}}{x^2}y = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{5} < \infty \\ \lim\limits_{x\to 0} h(x) = \frac{-1}{5} < \infty \end{cases}$$

لذا معادله به روش فروبنیوس دارای جوابی به فرم زیر است:

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

برای تعیین r می‌توان از معادله شاخصی(اندیسی) $r^2 + (g(0) - 1)r + h(0) = 0$ استفاده کرد که در اینجا به فرم $5r^2 - 4r - 1 = 0$ می‌باشد و با حل آن داریم: $r_1 = 1,\ r_2 = \frac{-1}{5}$

حالت باتوجه به اینکه تفاضل ریشه ها غیرصحیح است لذا معادله دارای دوجواب پایه ای به فرم زیر است:

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1},$$

$$y_2 = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-\frac{1}{5}}$$

که ضرایب سری های فوق باید تعیین شوند. با جایگذاری در معادله برای y_1 داریم:

$$5x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_n x^{n-1}\right) + x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^n\right) - (1-x^3)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}\right) = 0$$

$$\rightarrow\ 5\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_n x^{n+1}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^{n+1}\right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+4}\right) = 0$$

$$\rightarrow\ \boxed{5\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n x^{n+1}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+4}\right) = 0}$$

$$\rightarrow\ 5a_1x^2 + 20a_2x^3 + 5\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)^2 a_{n+3} x^{n+4}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+4}\right) = 0\ \rightarrow\ a_0 = \text{دلخواه}$$

و نیز $a_1 = a_2 = 0$ است. حال ضریب x^{n+4} در سمت راست تساوی بالا برابر است با:

$$(n+3)^2 a_{n+3} + a_n = 0\ \rightarrow\ \boxed{a_{n+3} = -\frac{a_n}{(n+3)^2}}$$

$$\rightarrow\ a_3 = -\frac{a_0}{9}, \qquad a_6 = -\frac{a_3}{36} = \frac{a_0}{9 \times 36}, \dots$$

$$a_1 = a_2 = 0\ \rightarrow\ a_4 = a_5 = 0, \qquad a_7 = a_8 = 0, \dots.$$

$$\boxed{y_1 = a_0 x(1 - \frac{x^3}{9} + \frac{x^6}{324} \mp \cdots)}$$

اکنون با جایگذاری در معادله برای y_2 داریم:

$$5x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(n-\frac{1}{5}\right)\left(n-\frac{6}{5}\right)b_n x^{n-\frac{11}{5}}\right) + x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(n-\frac{1}{5}\right)b_n x^{n-\frac{6}{5}}\right) - (1-x^3)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-\frac{1}{5}}\right) = 0$$

$$\to\ 5\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(n-\frac{1}{5}\right)\left(n-\frac{6}{5}\right)b_n x^{n-\frac{1}{5}}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(n-\frac{1}{5}\right)b_n x^{n-\frac{1}{5}}\right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-\frac{1}{5}}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+\frac{14}{5}}\right) = 0$$

$$\to\ \left(\sum_{n=0}^{\infty}(5n^2-6n)b_n x^{n-\frac{1}{5}}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+\frac{14}{5}}\right) = 0\ \to$$

$$\left(-b_1 x^{\frac{4}{5}} + 8b_2 x^{\frac{9}{5}} + \sum_{n=0}^{\infty}(5(n+3)^2 - 6(n+3))b_{n+3}x^{n+\frac{14}{5}}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+\frac{14}{5}}\right)$$

$$\to\ b_1 = b_2 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ضریب } x^{n+\frac{14}{5}}}\ \left(5(n+3)^2 - 6(n+3)\right)b_{n+3} + b_n = 0\ \to\ \boxed{b_{n+3} = -\frac{b_n}{5n^2+24n+27}}$$

$$b_3 = -\frac{b_0}{27}\ ,\qquad b_6 = -\frac{b_3}{56} = \frac{b_0}{27\times 56}$$

$$\boxed{y_2 = b_0 x^{\frac{-1}{5}}(1 - \frac{x^3}{27} + \frac{x^6}{27\times 56} \mp \cdots)}$$

توجه کنیم که در محاسبات فوق باتوجه به $b_1 = b_2 = 0$ فقط مضارب ۳ موجودند. لذا جواب عمومی برابر است با:

$$\boxed{y = Ax\left(1 - \frac{x^3}{9} + \frac{x^6}{324} \mp \cdots\right) + Bx^{\frac{-1}{5}}(1 - \frac{x^3}{27} + \frac{x^6}{27\times 56} \mp \cdots)}$$

---

۳. معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس و شرایط اولیه $y(0) = 0$ و $\acute{y}(0) = 1$ حل کنید.

$$xy'' + (2x+3)\acute{y} + (x+3)y = 3e^{-x}$$

حل: با استفاده از تبدیل لاپلاس داریم:

$$\mathcal{L}(xy'') + 2\mathcal{L}[x\acute{y}] + 3\mathcal{L}[\acute{y}] + \mathcal{L}(xy) + 3\mathcal{L}(y) = 3\mathcal{L}(e^{-x})$$

$$-\frac{d}{ds}\Big(\mathcal{L}(y'')\Big) - 2\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\acute{y}) + 3\mathcal{L}[\acute{y}] - \frac{d}{ds}\mathcal{L}(y) + 3Y(s) = \frac{3}{s+1}$$

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2Y(s) - sy(0) - \acute{y}(0)\right) - 2\frac{d}{ds}\left(sY(s) - y(0)\right) + 3\big(sY(s) - y(0)\big) - \acute{Y}(s) + 3Y(s) = \frac{3}{s+1}$$

$$\to\ \acute{Y} - \frac{1}{s+1}Y = \frac{-3}{(s+1)^3}\ \to\ Y(s) = (s+1)\left(\int \frac{-3}{(s+1)^4}ds + c\right) = (s+1)^{-2} + c(s+1)$$

$$\to\ y = \mathcal{L}^{-1}\big(Y(s)\big) = \mathcal{L}^{-1}\left((s+1)^{-2}\right) + ce^{-x} = ?$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F(s-a)\right) = e^{at}\mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right)\ \text{قضیه اول انتقال}\ \to\ y = \mathcal{L}^{-1}\Big((s+1)^{-2}\Big) + ce^{-x}$$

$$= e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left(s^{-2}\right) + ce^{-x} = (x+c)e^{-x} \xrightarrow{y(0)=0} \boxed{y = xe^{-x}}$$

---

۴. معادله انتگرال زیر را با شرط اولیه $y(0) = 1$ حل کنید.

$$\acute{y} + 2y + 2\int_0^x y(t)dt = u_2(x)$$

حل: برای حل معادله انتگرالی فوق کافیست تبدیل لاپلاس را بر طرفین تساوی اثر داده و محاسبات لازم را انجام دهیم. برای محاسبه طبق قضیه تلفیق (Convolution) داریم:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t g(t-\lambda)f(\lambda)d\lambda\right] = \mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(g(t))\mathcal{L}(f(t)) = G(s)F(s)$$

اکنون با توجه به معادله و اثر تبدیل لاپلاس داریم:

$$\mathcal{L}(\acute{y}) + 2Y(s) + 2\mathcal{L}[y*1] = \mathcal{L}(u_3(x))\ \to\ sY - 1 + 2Y + 2\frac{Y}{s} = \frac{1}{s}e^{-2s}$$

$$\to\ Y = \frac{s}{(s+1)^2+1} + \frac{e^{-2s}}{(s+1)^2+1}$$

$$\to\ y = \mathcal{L}^{-1}\big(Y(s)\big) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1-1}{(s+1)^2+1}\right) + e^2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2(s+1)}}{(s+1)^2+1}\right)$$

$$= e^{-x}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{s^2+1}\right) + e^{2-x}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right)$$

$$= e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{2-x}u_2(x)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)_{|x-2} = \boxed{e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{2-x}u_2(x)\sin(x-2)}$$

توجه کنیم در محاسبات فوق از قضیه اول و دوم انتقال که به کاربرد تابع پله‌ای واحد و تابع نمایی در انتقال متغیر اشاره دارند استفاده شده است:

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-\mathrm{cs}}\,F(s)] = u_c(t)\,f(t-c)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\,F(s-a)] = \mathrm{e}^{at}\,\mathcal{L}^{-1}[\,F(s)]$$

---

۵. حاصل انتگرال ناسره زیر را بیابید.

$$\int_0^\infty te^{-3t}\sin^2 t\;\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\frac{s}{s-1}\right]dt$$

حل: توجه کنیم که برای محاسبه

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\frac{s}{s-1}\right] = ?$$

داریم:

$$\mathcal{L}[-tf(t)] = \acute{F}(s)\;\;\rightarrow F(s) = \ln\frac{s}{s-1}\;\&\; -tf(t) = \;\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}\right] = 1-e^t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\frac{s}{s-1}\right] = \frac{1}{t}(e^t\;-1)$$

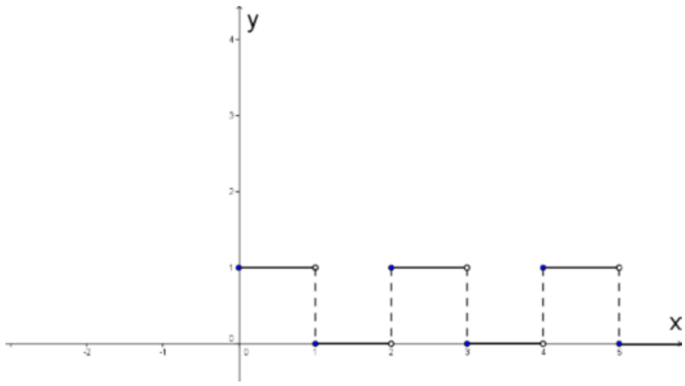
$$\rightarrow \int_0^\infty te^{-3t}\sin^2 t\;\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\frac{s}{s-1}\right]dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-3t}\sin^2 t\,(e^t\;-1)dt = \mathcal{L}(\sin^2 t)|(s=2) - \mathcal{L}(\sin^2 t)|(s=3)$$

از طرفی $\mathcal{L}(\sin^2 t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(1-\cos 2\mathrm{t}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{\mathrm{s}} - \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}^2+4})$

بنابراین

$$\int_0^\infty te^{-3t}\sin^2 t\;\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\frac{s}{s-1}\right]dt = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{4+4}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{9+4}\right)\right) = \boxed{\frac{23}{13\times 24}}$$



۶. مسأله مقدار اولیه $y''+y=f(x)$ را که در آن $f(x)$ تابع متناوب شکل زیر است با شرایط اولیه $y(0)=1$ و $\acute{y}(0)=0$ حل کنید.

حل: می دانیم که لاپلاس تابع متناوب f با دوره تناوب ω از رابطه زیر بدست می آید:

$$\mathcal{L}\big(\mathrm{f(t)}\big)=\frac{\int_0^{\omega} e^{-st}f(t)dt}{1-\mathrm{e}^{-s\omega}}$$

$$y''+y=f(x)\ \rightarrow\ \mathcal{L}(y'')+\ \mathcal{L}(y)=\mathcal{L}\big(\mathrm{f(t)}\big)=\frac{\int_0^{2} e^{-st}f(t)dt}{1-\mathrm{e}^{-2s}}=\frac{\int_0^{1} e^{-st}dt}{1-\mathrm{e}^{-2s}}=\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{\mathrm{s}(1-\mathrm{e}^{-2s})}$$
$$=\frac{1}{\mathrm{s}(1+\mathrm{e}^{-s})}$$

$$s^2Y-s+Y=\frac{1}{\mathrm{s}(1+\mathrm{e}^{-s})}\ \rightarrow\ \mathrm{Y}=\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{\mathrm{s}(s^2+1)(1+\mathrm{e}^{-s})}$$

$$\rightarrow\ \mathrm{y}=\mathcal{L}^{-1}[\,Y(s)]=\cos x+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}(s^2+1)(1+\mathrm{e}^{-s})}\right]=?$$

اما طبق قضیه تلفیق داریم:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}(s^2+1)(1+\mathrm{e}^{-s})}\right]=\int_0^x \sin(x-\lambda)\,f(\lambda)d\lambda=?$$

حال اگر $0\le x<1$ باشد آنگاه داریم:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}(s^2+1)(1+\mathrm{e}^{-s})}\right]=\int_0^x \sin(x-\lambda)\,d\lambda=\boxed{1-\cos x}$$

$$1\le x<2\ \rightarrow\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}(s^2+1)(1+\mathrm{e}^{-s})}\right]=\int_0^1 \sin(1-\lambda)\,d\lambda=\boxed{1-\cos 1}$$

$$2\le x<3\ \rightarrow\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}(s^2+1)(1+\mathrm{e}^{-s})}\right]=\boxed{1-\cos 1+\int_2^x \sin(x-\lambda)\,d\lambda}$$

$$3\le x<4\ \rightarrow\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}(s^2+1)(1+\mathrm{e}^{-s})}\right]=\int_0^1 \sin(1-\lambda)\,d\lambda+\int_2^3 \sin(3-\lambda)\,d\lambda$$

$$4 \le x < 5 \;\; \to \;\; \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}(s^2+1)(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{s}})}\right]$$
$$= \int_0^1 \sin(1-\lambda)\, d\lambda + \int_2^3 \sin(3-\lambda)\, d\lambda + \int_4^x \sin(x-\lambda)\, d\lambda$$

و بطور مشابه داریم:

$$2k \le x < 2k+1 \;\; \to \;\; \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}(s^2+1)(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{s}})}\right] = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{2i}^{2i+1} \sin(2i+1-\lambda)\, d\lambda + \int_{2k}^{x} \sin(x-\lambda)\, d\lambda$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} (1-\cos 1) + \big(1-\cos(x-2k)\big) = k\big(1-\cos 1\big) + \big(1-\cos(x-2k)\big)$$

$$2k+1 \le x < 2k+2 \;\; \to \;\; \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}(s^2+1)(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{s}})}\right] = \sum_{i=0}^{k} \int_{2i}^{2i+1} \sin(2i+1-\lambda)\, d\lambda = (k+1)(1-\cos 1)$$

بنابراین

$$\to \;\; \mathrm{y} = \mathcal{L}^{-1}[\,Y(s)] = \cos x + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}(s^2+1)(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{s}})}\right] = \boxed{\cos x + h(x)}$$

که در آن

$$\boxed{h(x) = \begin{cases} k\big(1-\cos 1\big) + \big(1-\cos(x-2k)\big) & 2k \le x < 2k+1 \\ (k+1)\big(1-\cos 1\big) & 2k+1 \le x < 2k+2 \end{cases}}$$

E.PK._Mon, Jun 10, 2015